Datenstrukturen & Algorithmen 3. Oktober 2016

Handout 2

Sebastian Millius, Sandro Feuz, Daniel Graf

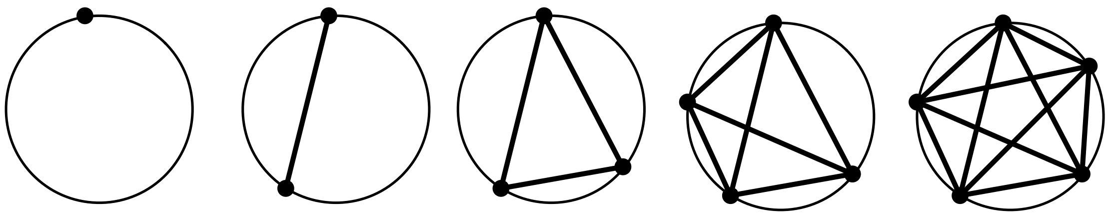
Thema: Beweise mit Induktion

If we have no idea why a statement is true, we can still prove it by induction. - Gian-Carlo Rota

Induction makes you feel guilty for getting something out of nothing, and it is artificial, but it is one of the greatest ideas of civilization. - Herbert Wilf

Induktionsbeweise

Um die wichtigste Beweistechnik in dieser Vorlesung, die vollständige Induktion, noch etwas zu üben, machen wir hier ein etwas ausführlicheres Beispiel. Dazu schauen wir uns ein kombinatorisches Problem an, das vorerst keine algorithmische Komponente hat. Auf einem Kreis wählen wir n Punkte und verbinden diese alle paarweise durch Strecken. Wieviele Flächen können auf diese Weise entstehen?



$A_1 = 1$ $A_2 = 2$ $A_3 = 4$ $A_4 = 8$ $A_5 = 16$

Diese Sequence legt die Vermutung $A_n = 2^{n-1}$ nahe, also jeder neue Punkt verdoppelt die Anzahl Flächen. Wie würden wir sowas beweisen? Dazu müssten wir erstmal eine Rekursionsgleichung aus dem geometrischen Problem ableiten und könnten dann per Induktion deren Äquivalenz zu unserer Vermutung zeigen. Doch das wird uns nicht gelingen, denn wir können leicht ein Gegenbeispiel finden, denn für sechs Punkte gilt nämlich $A_6 = 31$.

Überlegen wir uns also zuerst wie wir diesen geometrischen Vorgang mit einer Rekursionsgleichung beschreiben können. Fügen wir bei n Punkten einen $n+1$-ten dazu, so geschieht folgendes. Die Randfläche an welcher der neue Punkt zu liegen kommt wird durch die n Strecken zu den n bestehenden Punkten in $n+1$ Flächen aufgeteilt, das gibt also n neue Flächen. Jede dieser n Strecken teilt nun allenfalls noch einige weitere Flächen. Wie viele? So viele wie die neue Strecke bestehende Strecken kreuzt (wir belasten quasi jede geteilte Fläche dem Schnittpunkt auf der Seite des neuen Punktes). Schauen wir die i-te neue Strecke an (vom neuen Punkt aus im Uhrzeigersinn gezählt), so kreuzt diese jede Strecke die bei einem der $i-1$ Punkte weiter links beginnt und bei einemer der $n-i$ Punkte weiter rechts endet. Nehmen wir alles zusammen, so ergibt sich die Rekursion:

$$A_{n+1} = \begin{cases} 1, & \text{für } n = 0 \\ A_n + n + \sum_{i=1}^{n} (i-1) \cdot (n-i), & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

Bevor jetzt hierfür eine geschlossene Form zeigen, wollen wir es zuerst etwas vereinfachen.

Aussage 1. *Für alle $n \in \mathrm{N}$ gilt:*

$$\sum_{i=1}^{n} (i-1) \cdot (n-i) = \binom{n}{3}$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage mittels vollständiger Induktion.

Induktionsanfang $(n = 1)$: Es gilt $\sum_{i=1}^{1}(i-1)\cdot(n-i) = 0 = \binom{1}{3}$.

Induktionshypothese: Für ein $n \in \mathrm{N}$ sei: $\sum_{i=1}^{n}(i-1)\cdot(n-i) = \binom{n}{3}$

Induktionsschritt $(n \to n+1)$:

$$\sum_{i=1}^{n+1}(i-1)\cdot(n+1-i) = \underbrace{\sum_{i} = 1^{n+1}(i-1)}_{\text{Arithmetische Reihe aus der Vorlesung}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n+1}(i-1)\cdot(n-i)}_{\text{letzter Summand abspalten}}$$

$$= \frac{(n+1)\cdot n}{2} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}(i-1)\cdot(n-i)\right)}_{\text{I.H. anwenden}} + \underbrace{(n+1-1)(n-(n+1))}_{=-n}$$

$$\overset{\text{I.H.}}{=} \frac{(n+1)\cdot n}{2} + \binom{n}{3} - n$$

$$= \frac{3\cdot(n+1)\cdot n}{6} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6} - \frac{6n}{6}$$

$$= \frac{n^3 - n^2 - 2n^2 + 2n + 3n^2 + 3n - 6n}{6} = \frac{n^3 - n}{6}$$

$$= \frac{n^3 + n^2 - n^2 + n}{6} = \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}{6} = \binom{n+1}{3} \qquad \square$$

Ein intuitives Argument für diese Aussage ist folgendes Zählproblem: Um aus n Elementen 3 auszuwählen, gibt es $\binom{n}{3}$ Möglichkeiten. Diese können wir gemäss dem mittleren der 3 Elemente gruppieren. Fixieren wir das mittlere Element als das i-te von n Elementen, so bleiben uns $i-1$ Auswahlmöglichkeiten für das Element links davon und $n-i$ Möglichkeiten für das Element rechts davon. Wir können jedes Element links mit jedem Element rechts kombinieren und über alle Optionen für i summieren, also genau $\sum_{i=1}^{1}(i-1)\cdot(n-i)$, ohne irgendetwas doppelt zu zählen.

Nun bleibt also die Rekursion:

$$A_{n+1} = \begin{cases} 1, & \text{für } n = 0 \\ A_n + n + \binom{n}{3}, & \text{sonst} \end{cases} \tag{2}$$

Das Erraten der geschlossenen Form mittels Teleskopieren gestaltet sich hier ein wenig knifflig, aber man kommt zum Beispiel auf die richtige Formel, indem man ein Polynom vierten Grades durch die fünf Punkte oben legt. Wir vermuten $A_n = \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1$ und zeigen das erneut durch vollständige Induktion.

Aussage 2. *Für alle* $n \in \mathrm{N}$ *gilt:*

$$A_n = \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1 = \frac{1}{24}n^4 - \frac{1}{4}n^3 + \frac{23}{24}n^2 - \frac{3}{4}n + 1$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage mittels vollständiger Induktion.

Induktionsanfang $(n = 1)$: Es gilt $A_1 = \frac{1}{24} - \frac{1}{4} + \frac{23}{24} - \frac{3}{4} + 1 = 1$

Induktionshypothese: Für ein $n \in \mathrm{N}$ sei: $A_n = \frac{1}{24}n^4 - \frac{1}{4}n^3 + \frac{23}{24}n^2 - \frac{3}{4}n + 1$

Induktionsschritt $(n \to n+1)$:

$$A_{n+1} = A_n + n + \binom{n}{3}$$

$$\overset{\text{I.H.}}{=} \left(\frac{1}{24}n^4 - \frac{1}{4}n^3 + \frac{23}{24}n^2 - \frac{3}{4}n + 1\right) + n + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}$$

$$= \frac{1}{24}n^4 + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)n^3 + \left(\frac{23}{24} - \frac{1}{2}\right)n^2 + \left(-\frac{3}{4} + 1 + \frac{2}{6}\right)n + 1$$

$$= \frac{1}{24}n^4 + \left(\frac{4}{24} - \frac{1}{4}\right)n^3 + \left(\frac{6}{24} - \frac{3}{4} + \frac{23}{24}\right)n^2 + \left(\frac{4}{24} - \frac{3}{4} + 2\frac{23}{24} - \frac{3}{4}\right)n + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{4} + \frac{23}{24} - \frac{3}{4} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{24}(n+1)^4 - \frac{1}{4}(n+1)^3 + \frac{23}{24}(n+1)^2 - \frac{3}{4}(n+1) + 1 \qquad \square$$

Algorithmische Umsetzung

Mit der ersten Rekursionsformel (1) können wir für ein gegebenes n, den Wert A_n in quadratischer Zeit ausrechnen. Dazu rechnen wir für alle i von 1 bis n den Wert A_i aus, was wiederum jeweils das Auswerten einer Summe mit i Summanden beinhaltet. Insgesamt also $\Theta(n^2)$.

Die vereinfachte Rekursionsformel (2) erlaubt uns die innere Schleife einzusparen. Aus A_i berechnen wir in konstanter Zeit den nächsten Wert A_{i+1}. Somit berechnen wir A_n in $\Theta(n)$.

Mit Hilfe der geschlossenen Form geht das nun gar in konstanter Zeit! Wir werten lediglich ein einziges Polynom konstanter Grösse aus.

Wenn du es selber implementieren willst, dann schick deine Lösung auf diesen Online-Judge hier ein: `https://goo.gl/pA07sx`